UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ - U.V.A
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO EM MATEMÁTICA

UMA ABORDAGEM ACERCA DOS QUADRADOS MÁGICOS

DANIEL CAETANO DE FIGUEIREDO
SOBRAL - CEARÁ
JUNHO - 1999

UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ- U.V.A
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UMA ABORDAGEM ACERCA DOS QUADRADOS MÁGICOS

DANIEL CAETANO DE FIGUEIREDO
SOBRAL,CEARÁ
JUNHO – 1999

DANIEL CAETANO DE FIGUEIREDO

UMA ABORDAGEM ACERCA DOS QUADRADOS MÁGICOS

SOBRAL – CEARÁ
JUNHO-1999

UNIVERSIDADE ESTADUAL VALE DO ACARAÚ – UVA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UMA ABORDAGEM ACERCA DOS QUADRADOS MÁGICOS

DANIEL CAETANO DE FIGUEIREDO

Monografia apresentada à Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA, como requisito parcial a obtenção do título de especialista do Curso de Especialização em Ensino de Matemática.

SOBRAL- CEARÁ
JUNHO DE 1999

UMA ABORDAGEM ACERCA DOS QUADRADOS MÁGICOS

DANIEL CAETANO DE FIGUEIREDO

Apresentada em_____de_____de 1999.

_____

Prof. Francisco Rodrigues da Silva
Orientador

BANCA EXAMINADORA:

1._____

2._____

3._____

SOBRAL – CEARÁ
JUNHO-1999

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Caetano Figueiredo, meu querido pai e mestre insubstituível, que me ensinou os primeiros conceitos desta magnífica Ciência – a Matemática;
Dedico-o , ainda, a todos os meus ex-professores, sem os quais seria impossível a conclusão deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

- A todos os professores do Curso de Especialização, pela dedicação ao trabalho, amor à profissão e interesse em nos propiciar melhores condições de vida.

- Ao Magnífico Reitor José Teodoro Soares e ao Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa Prof. Francisco Sampaio Sales, pela oportunidade oferecida.

- Ao Prof. Francisco Rodrigues da Silva, idealizador e concretizador do curso.

- Aos meus colegas de curso, pelo estímulo e agradável convívio durante o período em que estudamos juntos.

- À minha esposa Vera Lúcia e aos meus filhos Ana Frieda e Caetano Neto, que me estimularam e souberam compreender a minha ausência aos sábados e domingos durante dez longos meses.

- Ao meu professor orientador pelo prestimoso incentivo, orientação e apoio.

RESUMO

Ao resumirmos o nosso trabalho, podemos constatar que a primeira parte do mesmo relaciona-se com a origem dos quadrados mágicos, quando procuramos discorrer sobre a incerteza desta origem, haja visto que não existe ainda uma certeza absoluta para responder as perguntas "quando surgiram realmente os quadrados mágicos ? ", "quem foi o criador dos quadrados mágicos ?", "onde eles foram criados ? ".

Passamos em seguida para as definições acerca da teoria dos quadrados mágicos, procurando explorar a parte teórica , falando sobre alguns conceitos e definições necessárias para uma melhor compreensão do tema.

Logo em seguida partimos para a parte , a nosso ver, mais importante, qual seja a construção dos quadrados mágicos. Nesta abordamos um método que nos permite construir qualquer quadrado de ordem ímpar e em seguida discorremos sobre outro método que nos permite construir quadrados mágicos de ordens pares que são múltiplas de quatro.

Relacionamos a seguir os quadrados mágicos com os números triangulares; em seguida discorremos sobre quadrados não puros; fazemos logo a seguir um estudo acerca do quadrado mágico fundamental para concluirmos o nosso trabalho procurando fazer uma generalização acerca dos quadrados mágicos de ordem ímpar.

SUMÁRIO

Página

1. INTRODUÇÃO....01

2. REVISÃO DE LITERATURA....03

2.1 ORIGENS DOS QUADRADOS MÁGICOS....03

2.2 DEFINIÇÕES....05

2.3 CONSTRUÇÃO DE UM QUADRADO MÁGICO....09

2.3.1 CONSTRUÇÃO DE UM QUADRADO MÁGICO DE ORDEM ÍMPAR....09

2.3.2 CONSTRUÇÃO DE UM QUADRADO MÁGICO DE ORDEM PAR....15

2.4 RELAÇÃO ENTRE OS QUADRADOS MÁGICOS E OS NÚMEROS TRIANGULARES....20

2.5 QUADRADOS MÁGICOS NÃO PUROS....21

2.5.1 QUADRADOS MÁGICOS NÃO PUROS FORMADOS POR NÚMEROS FRACIONÁRIOS....22

2.6 QUADRADOS MÁGICOS FORMADOS POR NÚMEROS PRIMOS....22

2.7 ESTUDOS SOBRE O QUADRADO MÁGICO FUNDAMENTAL (COM 9 CÉLULAS)....23

2.8 QUADRADO MÁGICO DE ORDEM ÍMPAR QUALQUER....25

3. CONCLUSÃO....27

4. BIBLIOGRAFIA....29

5. ANEXOS....30

1 -INTRODUÇÃO

Este trabalho é fruto, antes de tudo, da curiosidade do autor e de sua intenção em aprofundar os seus conhecimentos acerca do tema – quadrado mágico – muito pouco explorado no ensino da Matemática.

Ainda quando estudante do primeiro grau, travei pela primeira vez contato com este interessante assunto, mas confesso que ainda não possuía as condições intelectuais necessárias para estudá-lo de uma forma mais profunda. O tempo passava e, aqui ou acolá, conversando com colegas de profissão, alguém levantava assuntos relacionados com o tema em questão.

Eis que surgiu, no Curso que agora findamos, mais precisamente na disciplina Metodologia do Ensino de Matemática, a oportunidade de termos contato novamente com os quadrados mágicos. E aquelas aulas que tivemos em setembro de 1998 foram fundamentais para a escolha do tema deste trabalho.

Mas, afinal, quais são os objetivos do autor destas linhas em tão desprezado tema, sobre o qual os livros didáticos jamais dedicam uma linha sequer, de uma forma geral?

Na realidade a bibliografia sobre o assunto "quadrados mágicos" é muito escassa, daí a dificuldade para discorrer melhor sobre o assunto, apesar de o mesmo ser muito antigo e termos visto que grandes matemáticos se interessaram pelo tema, a exemplo do matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

Creio que determinados assuntos sobre jogos , quadrados mágicos, por exemplo, poderiam e deveriam ser mais explorados pelos professores no dia a dia da sala de aula. Citamos a antiga União das Repúblicas Socialistas Soviéticas, onde o xadrez é disciplina obrigatória. O xadrez, assim como os quadrados mágicos levam os alunos a refletirem, a raciocinarem e a fazer uso da lógica. É desnecessário falarmos acerca do entrosamento e da irmandade existente entre a lógica e matemática, pois ambas chegam a se confundirem muitas vezes. Segundo o matemático Karl Poppev " *as fronteiras entre a Matemática e a Lógica, nunca foram demarcadas. Não sabemos onde termina a Matemática e começa a Lógica, e reciprocamente*".

O estudo dos quadrados mágicos, além disto, está longe de ser um assunto tedioso, antes, é um assunto de fácil abordagem e que desperta a curiosidade até mesmo daqueles que não são estudantes de matemática.

No estudo que fazemos abordamos os quadrados mágicos ditos puros e também aqueles que são considerados não-puros, ou imperfeitos. Isto ocorre porque julgamos o estudo do segundos, além de interessante, não menos importante que o estudo dos primeiros.

Nos dias atuais os quadrados mágicos perderam o valor que possuíam como motivo de crenças misteriosas, mas em compensação a ciência lhes dedica atenção pois os quadrados mágicos são muito usados para projetar experiências que dependem de estatísticas.(Cf. Enciclopédia Conhecer, página 940) . Ainda discorrendo sobre a importância científica dos quadrados mágicos : " A teoria dos quadrados mágicos vem sendo formulada desde que Moschopulus publicou o *Tratado de Quadrados Mágicos*(1420), cujo interesse era basicamente recreativo. Mais tarde, no século XVIII, o suíço Leonhard Euler desenvolveu essa teoria, aproximando seu estudo do cálculo das matrizes e determinantes – o que quer dizer que existem quadrados muito mais complexos do que aqueles apenas recreativos".(Enciclopédia Conhecer Universal – 1982)

2 – REVISÃO DE LITERATURA

2 .1 - ORIGENS DOS QUADRADOS MÁGICOS

Pouco se conhece ainda hoje em dia sobre a história primitiva dos quadrados mágicos, porém sua origem parece situar-se na China. Existem estudiosos do assunto que afirmam terem os mesmos (quadrados mágicos) surgido há cerca de 3000 anos na China, e ainda, segundo estes, também na Índia. Os quadrados mágicos são arranjos quadrados de numerais em que as linhas, colunas e diagonais têm a mesma soma. E o nome quadrado mágico foi dado a este tipo especial de arranjo geométrico porque se acreditava que tivessem poderes especiais.

O exemplo abaixo, em notação numeral moderna, é atribuído ao imperador-engenheiro Yu, o Grande (c. 2200 A.C.). E, segundo diz a tradição, quando Yu estava observando o rio Amarelo, surgiu uma tartaruga divina, em cujo dorso estava o símbolo que hoje é conhecido pelo o nome de *lo shu*. Por isto, há muitos e muitos anos os chineses acreditavam que quem possuísse um quadrado mágico teria sorte e felicidade para toda a vida.

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Os quadrados mágicos foram se propagando, chegando posteriormente ao Japão, Índia e Oriente Médio, locais ligados ao misticismo. Apareceram na Arábia durante o século IX e na Índia durante o século XI ,ou até antes, e foram encontrados em escritos hebreus do século XII. Hoje em dia os quadrados mágicos servem de amuletos no Tibete, na Índia e em grande parte do sudeste da Ásia. Eram usados como talismãs, e a crença em seus poderes

mágicos perduraria durante toda a Idade Média e mesmo no Renascimento, quando os matemáticos os tomaram como objetos de estudo.

A introdução dos quadrados mágicos na Europa é atribuída ao escritor bizantino Manuel Moschopoulos, que os citou em sua obra intitulada " **Tratado de Quadrados Mágicos**" , isto durante o século XV. Moschopoulos viveu em Constantinopla numa época incerta, constando, apenas, que morreu na Itália em 1460.

Os quadrados mágicos eram relacionados com a alquimia e a astrologia, e um quadrado mágico gravado numa placa de prata era usado como amuleto contra a peste.

Mas, afinal, quando é que temos notícia da primeira impressão de um quadrado mágico? A história nos diz que o pintor e gravador alemão do Renascimento Albrecht Dürer em sua gravura intitulada Melancolia, datada de cerca de 1500, nos traz impresso um dos primeiros quadrados mágicos. Este quadrado mágico tinha quatro numerais horizontais e quatro outros dispostos verticalmente, sendo as somas iguais a 34.Ver a gravura no anexo 4 à página 37 .

No livro "**História da Matemática**", de autoria de Carl M. Boyer, está escrito à página 216 : "(...) A mesma combinação de interesses matemáticos e artísticos se encontra em Albrecht Dürer, um contemporâneo de Leonardo(da Vinci) e conterrâneo de Werner em Nuremberg. Na obra de Dürer vemos também a influência de Pacioli, especialmente na célebre gravura de 1514 intitulada Melancolia. Aqui o quadrado mágico tem presença proeminente. Esse é considerado freqüentemente o primeiro uso do quadrado mágico no Ocidente.(..)". E a página seguinte do citado livro traz o desenho do quadrado, que transcrevemos abaixo:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Edwaldo Bianchini escreve que "Os primeiros trabalhos a respeito de tabelas numéricas aconteceram na China antiga. Os calculistas daquela época

se interessavam bastante pelo estudo dos quadrados mágicos," (Bianchini – Matemática, vol.2, 1995).

Ainda com relação à história dos quadrados mágicos, sabe-se que durante o século XVII a teoria matemática da construção dos quadrados mágicos foi estudada seriamente na França. O Rei Luís XIV enviou Antoine de La Loubère para o Sião por volta de 1687-88 e este descobriu um método de construir quadrados mágicos de qualquer ordem ímpar, o que, convenhamos, tratou-se de uma grande conquista.

Por esta mesma época, ou seja, em 1686, um polonês chamado Adamas Kochansky conseguiu estender o estudo dos quadrados mágicos a três dimensões. O interesse por quadrados mágicos voltou a surgir no final do século XIX, quando os quadrados foram aplicados na resolução de problemas de probabilidade e análise. Conclui-se, portanto, que a idéia dos quadrados mágicos que possui raízes profundas no misticismo e foi freqüentemente considerada como mero passatempo, acabou se tornando uma parte importante da matemática contemporânea.

2.2 -DEFINIÇÕES

Um quadrado mágico é uma tabela de números dispostos na forma de um quadrado, de tal modo que a soma dos elementos de uma linha, coluna ou diagonal seja uma constante. Estes números devem ser inteiros e consecutivos, começados por 1. Quando o quadrado não respeita a definição dada anteriormente, recebe o nome de **quadrado imperfeito**, **defeituoso** ou **não puro**. Ou ainda , segundo Malba Tahan: " quando os elementos de um quadrado mágico não são números tomados na ordem natural (1,2,3,4,5...) o quadrado é denominado **quase-mágico** ". Mais adiante, citamos três exemplos de quadrados , sendo o primeiro exemplo de uma quadrado mágico puro de ordem três e os dois seguintes de quadrados imperfeitos de ordem três e quatro respectivamente :

8	**1**	**6**
3	**5**	**7**
4	**9**	**2**

4	9	8
11	7	3
6	5	10

17	3	4	14
6	12	11	9
10	8	7	13
5	15	16	2

Podemos dizer, ainda, que um quadrado mágico é um arranjo de números que vai de 1 até n^2 numa matriz nxn, onde cada número ocorre apenas uma vez e este arranjo é tal que a soma dos números existentes em uma linha deve ser igual à soma dos números existentes em qualquer coluna como também em qualquer das diagonais. As diagonais são formadas pelas casas – ou células – que vão de um vértice a outro do quadrado. Podemos partir do princípio que o valor desta soma deve ser igual a $n(n^2 + 1)/2$, sendo esta uma definição mais rigorosa sobre quadrado mágico, pois neste caso não pode ocorrer nem a repetição de números nem a ocorrência do número 0(zero). Ocorre porém que muitos autores aceitam não apenas a inclusão do número 0(zero) quanto também a repetição de números, desde que as condições das somas sejam satisfeitas com relação às linhas, colunas e diagonais. A estes quadrados mágicos assim obtidos é dado o nome de quadrados mágicos não puros, conforme dito anteriormente. Existem, ainda, quadrados mágicos que apresentam mais propriedades que as normalmente apresentadas e recebem o nome de hipermágicos.

A ordem n de um quadrado mágico é o número de colunas ou de linhas que este comporta.

Ao valor $n(n^2 + 1)/2$, que deve ser constante para cada quadrado mágico, é dado o nome de *constante mágica* ou *solução*, sendo igual ao valor da soma de cada linha ou coluna.

Podemos, ainda, dizer que o *valor secreto* que chamaremos de *v*, de um quadrado mágico é igual à soma de todos os números que este contém, e cujo valor pode ser dado por $v=n^2 (n^2 + 1)/2$.

Abaixo elaboramos uma tabela com a ordem, a solução e o valor secreto para os 20 primeiros quadrados mágicos:

Ordem(n)	**Solução(S)**	**Valor secreto(v)**
3	15	45
4	34	136
5	65	325
6	111	666
7	175	1225
8	260	2080
9	369	3321
10	505	5050
11	671	7381
12	870	10440
13	1105	14365
14	1379	19306
15	1695	25425
16	2056	32896
17	2465	41905
18	2925	52650
19	3439	65341
20	4010	80200

Sob a ótica deste princípio podemos afirmar que o mais simples dos quadrados mágicos seria o quadrado 1x1 descrito abaixo:

1

$S=1x(1^2 + 1)/2.$

Foi utilizada a palavra *seria* com relação a este quadrado mágico de ordem 1, pois muitos estudiosos da Matemática falam de sua inexistência, ou seja, não o aceitam como sendo um quadrado mágico válido, pois nem sequer é possível pensar em soma, neste caso. Ainda com relação ao quadrado de ordem 1, encontramos no livro " As Maravilhas da Matemática" de Malba Tahan à página 93: "...Segundo Cornélio Agripa(1486-1535), que era médico e matemático, o quadrado de ordem 1 (com uma casa) simbolizava a Eternidade."

E quanto ao quadrado mágico de ordem 2, que seria, de acordo com a definição o próximo quadrado ? É fácil verificarmos sua inexistência através da prática, pois é impossível encontramos números distintos que preencham as condições impostas para sua existência, qual seja a de que a soma dê a mesma tanto em relação às linhas, quanto às colunas e às diagonais. Com relação ao quadrado de ordem 2, encontramos no livro anteriormente citado " As Maravilhas da Matemática" à página 93: "...Segundo Cornélio Agripa(1486-1535)...(...) O quadrado de módulo 2, com quatro elementos, não poderia existir, pois esse quadrado iria simbolizar o mundo material com os quatro elementos, o ar, a terra, o fogo e a água – e por causa das imperfeições desses elementos o quadrado mágico não poderia ter constante certa."

Sendo assim, a teoria dos quadrados mágicos tem como ponto de partida o quadrado mágico de ordem 3, e por ser este o ponto de partida, é conhecido como *quadrado fundamental*:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

$S= 3x(3^2 +1)/2.$

E aqueles derivados deste por simetria. Notemos que este quadrado satisfaz a definição dada acima.

2.3 - CONSTRUÇÃO DE UM QUADRADO MÁGICO

Construir um quadrado mágico é obter aquele (quadrado) que venha a satisfazer as condições pré – estabelecidas. Exemplificaremos com a construção de um quadrado de ordem 3, que é o mais simples.
Existem várias maneiras de tentarmos resolver este problema, entre as quais podemos citar:

a).resolver um sistema de equações com nove variáveis porém que só possui oito equações, pois são oito somas que vão dar 15 por resultado. Claro está que esta maneira deve ser descartada.

b).tentar trabalhar utilizando tentativas ao preencher as nove células do quadrado. Quanto a este método, não é preciso irmos longe para descartá-lo, pois no quadrado mágico de ordem três, que é o mais simples, teremos nove maneiras distintas de preenchermos a primeira célula, oito de preenchermos a segunda, sete de preenchermos a terceira... A Análise Combinatória nos mostra que haverá 1x2x3x4x5x6x7x8x9 somas possíveis ou seja, 181440 resultados diferentes. Quem escolhesse esse método, se gastasse , digamos, 20 segundos para escolher os números e verificar a soma dos mesmos, levaria cerca de 40 dias de trabalho contínuo! Já imaginamos o que ocorreria quando esta pessoa tentasse encontrar o quadrado de 121 células, encontrado adiante, que construímos em poucos minutos e ilustra este trabalho.
É necessário, portanto, que recorramos a métodos mais simples e inteligentes.

2.3.1 - CONSTRUÇÃO DE UM QUADRADO MÁGICO DE ORDEM ÍMPAR

Na Revista do Professor da matemática, número 39, pág. ,existe um interessante artigo que nos fala acerca de quadrados mágicos. Este artigo nos

diz como construir um quadrado mágico de ordem cinco, e o transcreveremos abaixo **ipsis litris** .

A B

	11	19	2	15	23				
	12	25	8	21	4				
10	18	1	14	22	10				
11	24	7	20	3	16				
17	5	13	21	9	17				
23	6	19	2	15					
4	12	25	8	16					

Q C

"Para construir um quadrado 5x5 escrevemos os números de 1 a 25 no quadrado **Q** do seguinte modo:
Começamos colocando o 1 na casa central da primeira linha de **Q** e andamos duas casas para cima e uma para a direita para colocar os números seguintes. Se um número cai fora do quadrado **Q**, ficando nos quadrados **A**, **B** ou **C**, voltamos com o número na casa correspondente no quadrado **Q**.

Veja por exemplo, a colocação do 2. Se encontramos uma casa ocupada, como, por exemplo, na colocação do número 6 a casa a ser usada já está ocupada pelo 1. Escrevemos então o número (no caso o 6) na casa abaixo do número anterior (no caso o 5) e continuamos com a regra inicial. Completado o quadrado, obtemos soma 65 em todas as linhas, colunas e diagonais. (Enviado por Hideo Kumayama).

Uma outra maneira de montar o quadrado é a seguinte:
Começamos na mesma casa que o quadrado anterior, mas os movimentos para colocação dos números seguintes são sempre para a direita, em diagonal. As outras regras são mantidas como acima.

Você pode, agora, montar quadrados 7x7, 9x9,....

Que tal ?" (Extraído do livro'Matematical Recreations' de M. Kraitchik, publicado pela Dover Publications.Inc).

A B

	18	25	2	9	16				
17	24	1	8	15	17				
23	5	7	14	16	23				
4	6	13	20	22	4				
10	12	19	21	3	10				
11	18	25	2	9					

Q C

E foi justamente isto que o autor desta monografia procurou fazer, aceitando a sugestão e construindo , como exemplo, quadrados com 9, 49 , 81 e também com 121 células. Construí os quadrados seguintes usando a segunda maneira descrita acima e aproveitei a oportunidade para fazer observações acerca de cada quadrado construído.

Quadrado mágico de ordem 3 (9 células)

	9	2	7		
8	1	6	8		
3	5	7	3		
4	9	2			

O que podemos observar de interessante no quadrado acima? Entre outras coisas podemos verificar que :

a)os números 4, 5 e 6 formam uma progressão aritmética de razão 1;

b) que a soma 8+2 = 6+4 = 3+7 eh igual ao valor do termo central dividido por dois, ou seja, este termo(central) é a média aritmética da soma de dois valores "simétricos" a ele;

c)os números 2, 5 e 8 também formam uma progressão aritmética , cuja razão é igual a 3.

d)os elementos da coluna onde se encontra o valor central(5) formam uma P.A de razão igual a 4, ou seja , igual ao valor (n+1) sendo n o número de linhas ou colunas.

Quadrado mágico de ordem 7 (49 células)

A **B**

	31	40	49	2	11	20	29						
30	39	48	1	10	19	28	30						
38	47	7	9	18	27	29	38						
46	6	8	17	26	35	37	46						
5	14	16	25	34	36	45	5						
13	15	24	33	42	44	4	13						
21	23	32	41	43	3	12	21						
22	31	40	49	2	11	20							

Q **C**

Podemos observar que este quadrado satisfaz a condição afirmada anteriormente que nos diz ser $\mathbf{S=n(n^2 + 1)/n}$, onde n é o número de linhas(ou colunas) e S é a soma de todos os números do quadrado mágico. Notemos que, ainda, 25=S/49, sendo este o valor do termo que fica no centro do quadrado.

O que podemos observar de interessante no quadrado acima? Entre outras coisas podemos verificar que :

a)os números 4, 5 e 6 formam uma progressão aritmética de razão 1;

b) que a soma 8+2 = 6+4 = 3+7 eh igual ao valor do termo central dividido por dois, ou seja, este termo(central) é a média aritmética da soma de dois valores "simétricos" a ele;

c)os números 2, 5 e 8 também formam uma progressão aritmética , cuja razão é igual a 3.

d)os elementos da coluna onde se encontra o valor central(5) formam uma P.A de razão igual a 4, ou seja , igual ao valor (n+1) sendo n o número de linhas ou colunas.

Quadrado mágico de ordem 7 (49 células)

A **B**

	31	40	49	2	11	20	29						
30	39	48	1	10	19	28	30						
38	47	7	9	18	27	29	38						
46	6	8	17	26	35	37	46						
5	14	16	25	34	36	45	5						
13	15	24	33	42	44	4	13						
21	23	32	41	43	3	12	21						
22	31	40	49	2	11	20							

Q **C**

Podemos observar que este quadrado satisfaz a condição afirmada anteriormente que nos diz ser $\mathbf{S=n(n^2 + 1)/n}$, onde n é o número de linhas(ou colunas) e S é a soma de todos os números do quadrado mágico. Notemos que, ainda, 25=S/49, sendo este o valor do termo que fica no centro do quadrado.

Os elementos22,23,24,25,26,27 e 28 formam uma progressão aritmética de razão unitária.
Podemos observar que, também neste caso, a soma de dois elementos "simétricos" ao termo central 25 é uma constante, no caso a média aritmética da soma deste dois valores.(22+28 = 27+23= 30+20= 45+5= 14+36=....).
Vemos, ainda, que os elementos da coluna onde está o elemento central, ou seja, a coluna central, formam estes elementos uma P.A de razão igual a 8, ou seja igual a n+1, sendo n igual ao número de linhas(ou colunas).
O primeiro elemento da diagonal secundária, a contar de baixo para cima, é igual a 22, ou seja, assume o valor n(n-1)/2 + 1.

Quadrado mágico de ordem 9 (81 células)

	48	59	70		2	13	24	35	46								
47	58	69	80	1	12	23	34	45	47								
57	68	79	9	11	22	33	44	46	57								
67	78	8	10	21	32	43	54	56	67								
77	7	18	20	31	42	53	55	66	77								
6	17	19	30	41	52	63	65	76	6								
16	27	29	40	51	62	64	75	5	16								
26	28	39	50	61	72	74	4	15	26								
36	38	49	60	71	73	3	14	25	36								
37	48	59	70	81	2	13	24	35									

Podemos observar que:
a).37,38,39,.....,44 e 45 formam ,ainda ,uma progressão aritmética de razão unitária.
b).A soma de dois elementos "simétricos" ao termo central (41) do quadrado é uma constante.
c). Verificamos, também que os elementos da coluna central formam uma P.A de razão igual a n+1, no caso igual a 10 .
d). o elemento igual a 37 é o valor de $n(n - 1)/2 + 1$.

Quadrado mágico de ordem 11 (121 células)

	69	82	95	108	121	2	15	28	41	54	67
68	81	94	107	120	1	14	27	40	53	66	68
80	93	106	119	11	13	26	39	52	65	67	80
92	105	118	10	12	25	38	51	64	77	79	92
104	117	9	22	24	37	50	63	76	78	91	104
116	8	21	23	36	49	62	75	88	90	103	116
7	20	33	35	48	61	74	87	89	102	115	7
19	32	34	47	60	73	86	99	101	114	6	19
31	44	46	59	72	85	98	100	113	5	18	31
43	45	58	71	84	97	110	112	4	17	30	43
55	57	70	83	96	109	111	3	16	29	42	55
56	69	82	95	108	121	2	15	28	41	54	

A exemplo dos quadrados mágicos anteriores, neste quadrado de 121 células também podemos observar o seguinte:

a)Os números que constituem uma das diagonais do quadrado (56,57,58,....,66) formam uma progressão aritmética de razão 1;

b)O número que ocupa a posição central do quadrado, no caso o número 61, continua sendo a média aritmética de todos os números (incluindo ele) que formam o quadrado mágico; No caso, 61 = 7381/121;

c)Continua valendo aquela propriedade , qual seja a de que a média aritmética de dois elementos "simétricos" ao termo central é igual ao valor do termo central, no caso: (7+115)/2=(20+102)/2=(56+66)/2=.....=61;

d)Os números da sexta coluna constituem uma P.A de razão igual a 12, mantendo a lei de formação anteriormente citada, qual seja n+1.
e)o elemento 56 continua sendo igual a n(n -1)/2 + 1.

2.3.2 - CONSTRUÇÃO DE UM QUADRADO MÁGICO DE ORDEM PAR

Se por um lado a construção de qualquer quadrado de ordem ímpar é uma tarefa relativamente fácil, o mesmo não ocorre quando abordamos os quadrados de ordens pares.
Descrevemos abaixo uma maneira de construir quadrados de algumas ordens pares. O autor desta linhas aproveita para, em seguida, construir quadrados mágicos de ordem 4, 8 e 12:

Quadrado mágico de ordem 4 (16 células)

1	2	3	4
8	7	6	5
12	11	10	9
13	14	15	16

Como foi construído este quadrado mágico? Preenchemos a primeira linha colocando os vinte e cinco por cento do total de números do quadrado (números 1,2,3 e 4)**da esquerda para a direita**. Em seguida colocamos os cinquenta por cento do total dos números, em ordem crescente, **da direita para a esquerda**(seqüência 5,6,7 e 8 e em seguida a seqüência 9,10,11 e 12). Finalmente, colocamos os vinte e cinco por cento restantes novamente **da**

esquerda para a direita. Conforme poderemos observar mais adiante, quando da construção de um quadrado de ordem 8, esta "regra" funciona também para este. Notamos, feito isso, que a soma de todas as colunas já apresenta o valor 34, que realmente deve ocorrer pois $n(n^2 + 1)/2 = 34$ para o valor n=4.
Devemos agora, trocar os cinqüenta por cento centrais das linhas (2 e 3 por 14 e 15 e 7 e 6 por 11 e 10), obtendo o quadrado mágico procurado.

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

Podemos observar que a soma de dois números que estão à mesma distância dos extremos é a mesma, e, no caso, igual à soma dos próprios extremos. Assim temos que 7+10=11+6=13+4=1+16= 17

Quadrado mágico de ordem 8 (64 células)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
24	23	22	21	20	19	18	17
32	31	30	29	28	27	26	25
40	39	38	37	36	35	34	33
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Também aqui podemos observar que, a contar de cima para baixo, as duas primeiras linhas (vinte e cinco por cento das linhas) foram preenchidas colocando-se os vinte e cinco por cento dos primeiros números do quadrado , em ordem crescente, **da esquerda para a direita**. As quatro linhas seguintes (cinqüenta por cento do total dos números) foram preenchidas colocando-se os números **da direita para a esquerda**, e , finalmente, os vinte e cinco por cento dos números restantes foram colocados da **esquerda para a direita**, tal qual ocorrera quando construímos o quadrado de ordem 4 anterior. Feito isso, notamos que em todas as colunas já atingimos a soma procurada, que será igual a 260. Resta fazer a compensação entre as linhas para que estas atinjam o mesmo valor. Vamos fazer, novamente, a permuta entre as quatro colunas centrais, que correspondem a , igualmente, cinqüenta por cento das colunas, de tal forma que os quatro elementos centrais da primeira linha ocupem o lugar dos quatro correspondentes da última linha, os da segunda linha ocupem o lugar dos elementos da penúltima, os da terceira ocupem os lugares dos elementos da antepenúltima linha e assim por diante.
Feito isto, teremos o quadrado mágico de ordem 8 procurado:

1	2	59	60	61	62	7	8
9	10	51	52	53	54	15	16
24	23	46	45	44	43	18	17
32	31	38	37	36	35	26	25
40	39	30	29	28	27	34	33
48	47	22	21	20	19	42	41
49	50	11	12	13	14	55	56
57	58	3	4	5	6	63	64

Notamos que, aqui também, a soma de dois elementos eqüidistantes dos extremos é a mesma, no caso esta é igual a 65.

QUADRADO MÁGICO DE ORDEM 12(144 células)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49
72	71	70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
84	83	82	81	80	79	78	77	76	75	74	73
96	95	94	93	92	91	90	89	88	87	86	85
108	107	106	105	104	103	102	101	100	99	98	97
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

Quadrado de 144 células depois de concluído

1	2	3	136	137	138	139	140	141	10	11	12
13	14	15	124	125	126	127	128	129	22	23	24
25	26	27	112	113	114	115	116	117	34	35	36
48	47	46	105	104	103	102	101	100	39	38	37
60	59	58	93	92	91	90	89	88	51	50	49
72	71	70	81	80	79	78	77	76	63	62	61
84	83	82	69	68	67	66	65	64	75	74	73
96	95	94	57	56	55	54	53	52	87	86	85
108	107	106	45	44	43	42	41	40	99	98	97
109	110	111	28	29	30	31	32	33	118	119	120
121	122	123	16	17	18	19	20	21	130	131	132
133	134	135	4	5	6	7	8	9	142	143	144

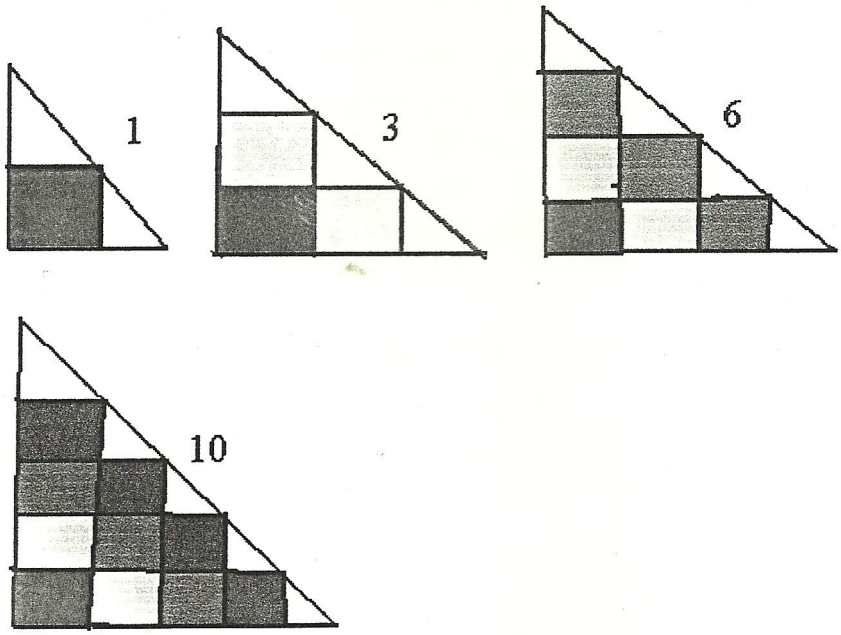
Podemos notar que a maneira de obtermos quadrados de ordem 4,8 e 12 foi bem mais trabalhosa – menos mecânica - do que aquela utilizada na obtenção dos quadrados de ordem ímpar. Além do mais, o processo para a obtenção de quadrados de ordem ímpar pode ser generalizado, valendo para todos os quadrados de ordem ímpar, enquanto que o método para a obtenção dos quadrados de ordem par anteriormente citado, não pode ser estendido a todos aqueles de ordem par, pois o processo que utilizamos não serve para a construção de quadrados de ordem 6, 10, 14,..., cujas ordens não são múltiplas de quatro, apesar de serem pares. Será porquê, nestes, é impossível obtermos os famosos vinte e cinco por cento em quantidades inteiras? Nos anexos encontramos exemplos de quadrados mágicos de ordens 6 e 10, cuja construção o autor desta monografia não conseguiu realizar, mas que servem de ilustração para os estudiosos do assunto.

2.4 - RELAÇÃO ENTRE OS QUADRADOS MÁGICOS E OS NÚMEROS TRIANGULARES

Podemos representar um número inteiro por meio de uma fila de pedras do jogo das damas, colocando tantas pedras quanto sejam as unidades.

Fazendo o que foi exposto acima, podemos dizer que números triangulares são aqueles que formam triângulos ao disporem-se as carreiras de pedras uma a par das outras, ou seja, uma na primeira, duas na segunda, três na terceira, e assim por diante.

O desenho abaixo explica melhor o que foi dito:



Não é difícil verificarmos que a sequência dos números triangulares pode ser obtida pela fórmula **n(n + 1)/2** , que, para n = 1,2,3,... fornece os números 1, 3, 6, 10, 15,... .

Os quatro primeiros números triangulares são, conforme o desenho, os números 1, 3 , 6 e 10. Se continuarmos utilizando o mesmo processo de construção, veremos que os próximos números triangulares serão os números 10,15, 21 ,28 e assim por diante. Apenas a título de curiosidade, podemos citar

que existem, ainda , os números quadrados(1,4,9,16,...) e os números cúbicos (1,8,27,...)

Qual a relação, afinal, que existe entre os números triangulares e os quadrados mágicos?

Para exemplificarmos, peguemos um quadrado com nove células(3x3). Afirmamos que somar os números de 1 a 9 é o mesmo que acharmos o valor do nono número triangular. No caso, conforme pode ser verificado facilmente, a soma dos números existentes no quadrado mágico e o valor do número triangular procurado, são ambos iguais a 45.

2.5 - QUADRADOS MÁGICOS NÃO PUROS

Um interessante problema consiste em , dados os valores de três células quaisquer em um quadrado mágico 3x3, determinar os números que devem ocupar as seis células restantes. Há de se supor que estes seis números que faltam devem ser únicos, porém não é o caso dos quadrados abaixo, existindo diversas soluções para o mesmo problema:

1	**10**	4
8	5	2
6	0	**9**

9	**10**	8
8	9	10
10	8	**9**

O que ocorreu, então? Notemos que o primeiro quadrado usou o número zero enquanto que o segundo repetiu três números , fugindo portanto à definição de quadrado mágico puro e não podendo, assim, ser considerados quadrados mágicos autênticos.

2.5.1 - QUADRADOS MÁGICOS NÃO PUROS FORMADOS POR NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Interessante exemplo de quadrado mágico pode ser considerado aquele onde, além de números inteiros, aparecem também números fracionários. Encontramos um destes exemplos à página 236 do livro Raciocínio Lógico (volume 1) de autoria de Jonofon Sérates, que nos propõe o seguinte exercício:

"Dispor , nos quadradinhos da figura ao lado, os elementos do conjunto: {1/4, 1/2, 3/4, 1, 1 ¼, 1 ½, 1 ¾, 2, 2 ¼ } de tal modo que as somas nos sentidos horizontal, vertical e das duas diagonais sejam iguais a 3 ¾."

E nos apresenta a resposta à página 335 que, aliás, não é a única solução para o problema:

2	**¼**	**1 ¼**
3/4	**1 ¼**	**1 ¾**
1	**2 ¼**	**½**

2.6 - QUADRADOS MÁGICOS FORMADOS POR UMA SEQÜÊNCIA DE NÚMEROS PRIMOS

Em nossas pesquisas pelas ondas eletromagnéticas da Internet, constatamos existirem quadrados mágicos formados exclusivamente por números primos sendo que, o que é mais interessante, estes números estão em seqüência. Estes quadrados estão apresentados no **anexo 2**, à página 34 desta monografia, bem como também é citado o site onde eles podem ser encontrados .

2.7 - ESTUDO SOBRE O QUADRADO MÁGICO FUNDAMENTAL(COM 9 CÉLULAS)

Esta parte de nosso estudo é fruto de observações efetuadas durante a disciplina do curso intitulada *Metodologia do Ensino de Matemática* ministrada pelo Prof. Ms. Francisco Rodrigues da Silva em setembro de 1998, que abordava quadrados de ordem três.
Dado um quadrado de nove células, as quais indicaremos pelas letras **A**, **B** ,**C**....., **I** :

A	**B**	**C**
D	**E**	**F**
G	**H**	**I**

Foram feitas as seguintes observações, válidas para números inteiros:

Primeira: Se o número que ocupar **A** for um número par, o número em **I** também será par;

Segunda: Se o número em **A** for ímpar, o número que ocupa a célula **I** também será impar;

Terceira: existe uma relação entre as células **B** , **F** e **G** tal que:

(**B**+**F**)/2 = **G**;

Quarta: existe também uma relação entre as células **D**, **H** e **C** que é a descrita abaixo:

(**D**+**H**)/2 = **C**;

Quinta: o número que ocupar a célula **E** é a média aritmética da soma de todos os números, incluído este, existentes no quadrado mágico quando o quadrado estiver concluído, ou seja, todos os números ocuparem as posições corretas;

Sexta:

Cada linha ou coluna ou diagonal do quadrado mágico é 1/3 da soma dos números existentes;

Sétima: vamos agora provar que, em um quadrado mágico de nove células o número que ocupa a célula central é igual ao valor da soma de todos os números existentes no quadrado (S) dividido pelo número de células, ou seja, S/9.

A + **E** + **I** = S/3
B + **E** + **H** = S/3
C + **E** + **G** = S/3

Somando as três equações obtemos:
A + **B** + **C** + 3**E** + **I** + **H** + **G** = S

Ocorre que **A** + **B** + **C** = S/3 e este é também o valor de **I** + **H** + **G**, portanto teremos:
S/3 + 3**E** + S/3 = S , donde se conclui que **E** = S/9.

A seguir, novamente voltamos a nos valer de bibliografia alheia, reconhecendo porém que a ciência não possui donos e que todo o estudo e pesquisa tem por proprietário a humanidade em sí, os interessados em estudar e pesquisar, além de aprofundar as descobertas anteriores. Os quadrados abaixo foram obtidos do site da Internet – poderosa, democrática e fabulosa fonte de consulta :
http://www.forum.swarthmore.edu/alejandre/magic.square/

2.7.1 - QUADRADOS MÁGICOS DE 9 CÉLULAS EM ORDEM NUMÉRICA.

	1			2			3			4	
8	1	6	17	10	15	26	19	24	35	28	33
3	5	7	12	14	16	21	23	25	30	32	34
4	9	2	13	18	11	22	27	20	31	36	29

5			6			7			8			9		
44	37	42	53	46	51	62	55	60	71	64	69	80	73	78
39	41	43	48	50	52	57	59	61	66	68	70	75	77	79
40	45	38	49	54	47	58	63	56	67	72	65	76	81	74

2.8 - QUADRADO MÁGICO DE ORDEM ÍMPAR QUALQUER

Para uma ordem ímpar qualquer, desde que $n \geq 3$ e que o quadrado tenha sido preenchido conforme a regra citada à página..., os nossos estudos levam às seguintes conclusões:

					1					N(n-1)/2+n
					N+2				.....	
					N+3			.....		
					.....		.....			
					.....	.....				
					$(n^2+1)/2$					
				.....	.....					
			.....		.....					
		.....			.....					
	N(n-1)/2+2				.....		3			
N(n-1)/2+1					N^2	2				

Considerando n a ordem do quadrado, podemos afirmar que:

a). a razão da P.A formada pelos elementos da coluna central vale $(n + 1)$;

b).o termo central do quadrado mágico assume sempre o valor $(n^2 + 1)/2$;

c).o último elemento da coluna central assume o valor n^2;

d).o primeiro elemento, a contar de baixo para cima, que ocupa a diagonal secundária vale $n(n - 1)/2 + 1$.

3 – CONCLUSÃO

A que conclusões podemos chegar ao findar o nosso trabalho? Diríamos que a primeira conclusão é de que devemos continuar admirando esta maravilhosa Dama que se esconde sob o pseudônimo de **Matemática**. Esta maravilhosa ciência, tão antiga, tão perfeita que, quanto mais a estudamos, mais cremos em nossa insignificância, a medida que a compreendemos, já que ela nos mostra a solução de problemas incríveis.

Convenhamos que para a maioria dos mortais não é tarefa fácil colocar nove números dispostos em um quadrado 3x3 de tal forma que a soma destes, quer em linhas, quer em colunas, quer em diagonais, seja a mesma. E nos admiramos ao saber que este é o mais simples dos quadrados mágicos : falamos do quadrado mágico fundamental! O que diriam se pedíssemos que as mesmas condições fossem satisfeitas para um quadrado mágico de ordem 1001x1001 , por exemplo? Certamente, seríamos taxados como loucos...

No entanto, prezado amigo, ao terminar de ler o trabalho que acabamos de concluir, eu lhe direi que, com certeza, sereis capaz de construir este quadrado de ordem 1001x1001 e, o que é mais importante, não apenas este, mas qualquer quadrado mágico de ordem ímpar! Isto porque existe algo chamado de **método**, tão importante para a Matemática, que naquele se baseia! A Matemática é, certamente, a Rainha das Ciências! Somente aqueles que não a compreendem podem se dar ao luxo de falar o contrário...As linhas que acabamos de escrever baseiam-se no fato de que existe um método que nos permite **resolver quadrados mágicos de qualquer ordem ímpar**. Convenhamos... Isto é algo fabuloso, apesar de pouco valorizado , de pouco conhecido.

Concluímos, também, que é possível formar quadrados mágicos de ordem par - 4x4, 8x8, 12x12.....10024x10024! Isto também porquê os métodos matemáticos nos ensinam. È bem verdade que não podemos deixar de lamentar o fato de que, o método descrito para resolver quadrados de ordem par, **seja válido apenas para aquelas ordens múltiplas de quatro(4, 8, 12,....).** Neste aspecto devemos reconhecer nossa limitação! Mas, certamente, concluiremos que um dia, inevitavelmente, alguém aparecerá para resolver este problema. É uma questão de tempo...

Outra conclusão a que chegamos , depois de formular este trabalho, foi acerca da universalidade das Ciências – a Matemática incluída neste rol – e do conhecimento humano, que **devem ser acessíveis a todos e destes ser propriedade comum**. Aliás , o termo propriedade aqui

especificado não é aquele empregado em seu sentido vulgar, que designa posse de uma pessoa em detrimento de muitos... ou pelo menos não deve ser!

Assim, a nossa **conclusão**, reforça a idéia de que a Ciência é propriedade de todos...Na realidade , quando se fala em sala de aula , por exemplo, acerca do " Teorema de Pitágoras", este *de* representa não apenas aquele quem o descobriu, quem o criou, mas sim toda a humanidade. O Teorema de Pitágoras, portanto, é uma das grandes contribuições de Pitágoras para a Matemática. O matemático Pitágoras com certeza deu uma grande contribuição para o conhecimento humano, mas jamais quis que aquilo que descobriu fosse apenas seu...

4 – BIBLIOGRAFIA

BIANCHINI, Edwaldo e PACCOLA, Herval – MATEMÁTICA, vol.2, Editora Moderna, São Paulo, 1995.

BOYER, Carl Benjamin – HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, São Paulo, Edgar Blücher, 1974.

CONHECER: Enciclopédia, volume IV, páginas 938-940, Abril S.A Cultural E Industrial, São Paulo, 1973.

CONHECER UNIVERSAL: Enciclopédia, volume XII, páginas 2434-2435, Abril Cultural, São Paulo, Brasil, 1982.

GUNDLACH, Bernard H. – HISTÓRIA DOS NÚMEROS E NUMERAIS, São Paulo, Atual Editora, 1992.

O MUNDO EM QUE VIVEMOS : publicação sob a direção de FERNANDO GUEDES e ARTUR ANSELMO, Editora Verbo, São Paulo

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, publicação quadrimestral da Sociedade Brasileira de Matemática – número 39, São Paulo, 1999.

SÉRATES, Jonofon – RACIOCÍNIO LÓGICO – 6ª Edição – Brasília: Gráfica e Editora Olímpica Ltda., 1997, volumes I e II.

RIEGEL, Peter. [on line]. Disponível: http://productivity.org/~priegel/promagic.html [capturado em 21 de junho de 1999].

SUZUKI,Mutsumi. [on line]. Disponível: http://www.psc.chc.tohoku.ac.jp/~ [capturado em 05 de julho de 1999].

ALEJANDRE, Suzanne . [on line]. Disponível: http://forum.swarthmore.edu./ [capturado em 08 de julho de 1999].

5 - ANEXOS

ANEXO 1

Na disciplina *Metodologia do Ensino de Matemática,* lecionada pelo Ms. Francisco Rodrigues da Silva e que fez parte de nosso curso, nos foi apresentada em 19 de setembro de 1998 uma lista de exercícios intitulada Aplicações e Jogos, cujo conteúdo sobre Quadrados Mágicos transcrevo na íntegra abaixo:

1. QUADRADOS MÁGICOS

Em um quadrado mágico a soma das colunas, linhas e diagonais são as mesmas. A questão é determinar, dados três números, os seis restantes e únicos, de forma que a característica do quadrado permaneça a mesma.

Exemplo. A soma de qualquer linha, coluna ou diagonal é 9.

1	6	2
4	3	2
4	0	5

Complete os quadrados mágicos:

1		
3		3

2		
		3
	1	

	1	
1		
		1

		0
0		
2		1

3		
		5
	1	

	10	
8		
		9

3		
		5
7		

	7	
3		
		5

8		
		7
5		

		25
40		
	10	

	110	
90		
		100

		50
60		
		80

	0	
30		
		15

105		
		100
	110	

110		
		140
160		

ANEXO 2

No site da Internet

http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki/MagicSquare.prime.seq.html

encontramos interessantes exemplos de quadrados mágicos formados por seqüências de números primos que foram criados por G. Abe e A . Suzuki em 1957, e que forma publicados no livro " Study of Magic Squares"(Estudo dos Quadrados Mágicos) de autoria de Abe.

a). Quadrado 5x5 com os números primos de 13 a 113, criado por Gakuho Abe

17	79	101	43	73
13	113	89	61	37
109	19	41	47	97
107	71	53	59	23
67	31	29	103	83

b). Quadrado mágico de ordem 6 com os números primos consecutivos de 7 a 167, feito por Akio Suzuki.

167	37	127	11	101	41
47	71	157	97	83	29
7	23	17	151	137	149
103	131	43	67	61	79
53	59	31	139	89	113
107	163	109	19	13	73

c).Quadrado mágico de ordem 7 com os números primos consecutivos de 7 até 239, feito por Akio Suzuki.

233	**13**	**19**	**223**	**29**	**113**	**167**
173	**47**	**103**	**191**	**61**	**59**	**163**
157	**149**	**37**	**71**	**127**	**17**	**239**
83	**181**	**79**	**41**	**131**	**193**	**89**
7	**107**	**229**	**109**	**197**	**137**	**11**
43	**73**	**151**	**23**	**199**	**211**	**97**
101	**227**	**179**	**139**	**53**	**67**	**31**

ANEXO 3

QUADRADOS MÁGICOS DE ORDEM 6 e 10

QUADRADO MÁGICO 6x6

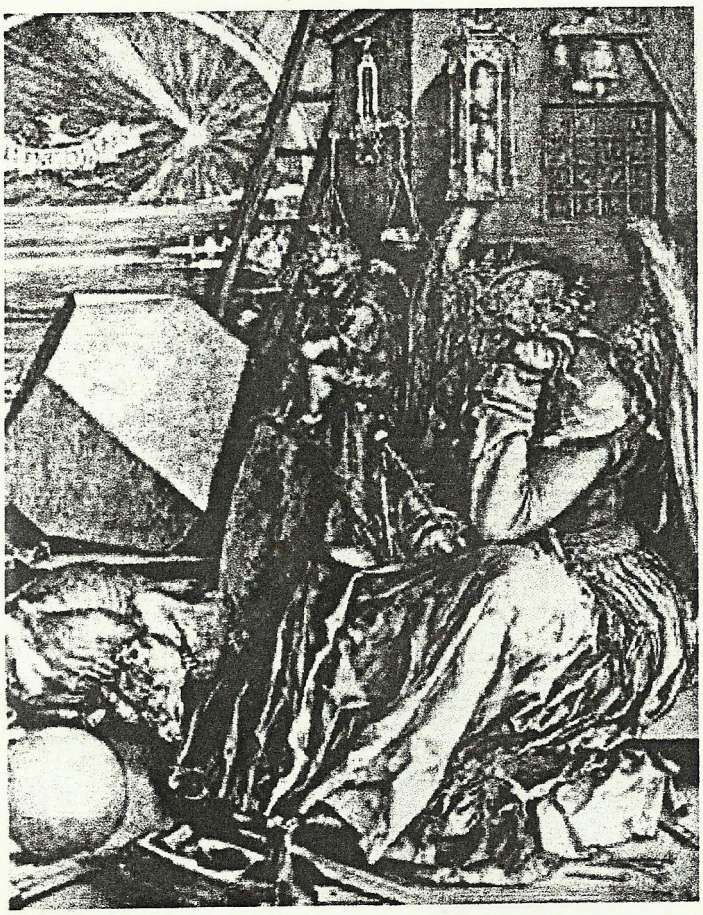
1	32	3	34	35	6
12	29	9	10	26	25
13	14	22	21	23	18
24	20	16	15	17	19
30	11	28	27	8	7
31	5	33	4	2	36

QUADRADO MÁGICO 10x10

1	92	3	94	5	6	97	98	99	10
20	89	18	87	16	15	84	13	82	81
21	72	23	74	25	76	77	28	79	30
40	69	38	67	35	36	64	33	62	31
41	52	43	44	56	55	57	48	59	50
51	42	58	54	46	45	47	53	49	60
70	39	68	37	66	65	34	63	32	61
80	22	73	24	75	26	27	78	29	71
90	19	88	17	86	85	14	83	12	11
91	9	93	4	95	96	7	8	. 2	100

Estes exemplos foram retirados na Internet do site abaixo:

http://www.pse.che.tonoku.ac.jp/~msuzuki/



MELANCOLIA